Jacek Kredenc

Propozycje rozwiązań zadań z matematyki - matura rozszerzona

Zadanie 1

W rozwinięciu wyrażenia $\left(2\sqrt{3}x+4y\right)^3$ współczynnik przy iloczynie xy^2 jest równy

A. $32\sqrt{3}$ **B.** 48 **C.** $96\sqrt{3}$ **D.** 144

Rozwiązanie:

Zastosujmy trójkąt Paskala

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

Przy iloczynie xy^2 będzie stał współczynnik 3. Zatem

$3\cdot 2\sqrt{3}x\cdot(4y)^2=6\sqrt{3}x\cdot 16y=96\sqrt{3}xy^2$

Odpowiedź : C

Zadanie 2

Wielomian $W(x)=6x^3+3x^2-5x+p$ jest podzielny przez dwumian $x-1$ dla p równego

A. 4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -4

Rozwiązanie:

Ponieważ wielomian W(x) ma być podzielny przez dwumian $x-1$, więc jednym z jego pierwiastków jest x=1, czyli

$W(1)=0$

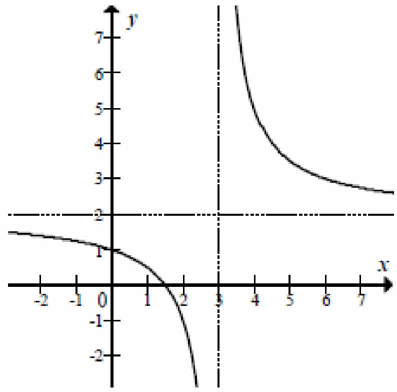
$6\cdot 1^3+3\cdot 1^2-5\cdot 1+p=6+3-5+p=4+p=0$

$p=-4$

Odpowiedź: D

Zadanie 3.

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji homograficznej $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

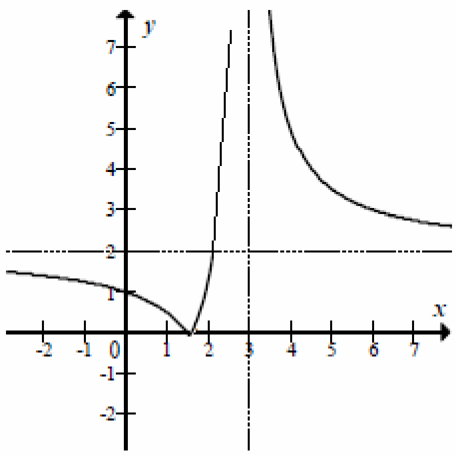


Równanie $|f(x)| = p$ z niewiadomą x ma dokładnie jedno rozwiązanie

A. w dwóch przypadkach: $p = 0$ lub $p = 3$.
B. w dwóch przypadkach: $p = 0$ lub $p = 2$.
C. tylko wtedy, gdy $p = 3$.
D. tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Rozwiązanie:

Wartość bezwzględna odbije symetrycznie fragment wykresu znajdujący się pod osią ox i wykres |f(x)| będzie wyglądał następująco:



Odpowiedź B

Zadanie 4

Funkcja $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+4}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x. Pochodna tej funkcji jest określona wzorem

A. $f'(x)=\frac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$ **B.** $f'(x)=\frac{-9x^2+2x-12}{(x^2+4)^2}$

C. $f'(x)=\frac{3x^2-2x-12}{(x^2+4)^2}$ **D.** $f'(x)=\frac{9x^2-2x+12}{(x^2+4)^2}$

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$f'(x)=\frac{3(x^2+4)-(3x-1)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{3x^2+12-6x^2+2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$$

Odpowiedź: A

Zadanie 5

Granica $\lim_{n\to\infty}\frac{(pn^2+4n)^3}{5n^6-4}=-\frac{8}{5}$. Wynika stąd, że

A. $p=-8$ **B.** $p=4$ **C.** $p=2$ **D.** $p=-2$

Rozwiązanie:

Po rozwinięciu licznika, okaże się, że na wartość granicy ma tylko wpływ wyraz p^3n^6 i że granica jest równa $\frac{p^3}{5}=-\frac{8}{5}$

Odpowiedź: D

Zadanie 6

Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	Liczba osób popierających budowę przedszkola	Liczba osób niepopierających budowy przedszkola
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie:

Tak naprawdę to potrzebne są nam tylko informacje dotyczące mężczyzn. Wszystkich mężczyzn było 3000. Za budową przedszkola opowiedziało się 2260 respondentów, czyli prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mężczyzna będzie za budową przedszkola wynosi

$$\frac{2260}{3000} = 0{,}7533333\ldots$$

Odpowiedź: $\boxed{7}\boxed{5}\boxed{3}$

Zadanie 7

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Szereg geometryczny jest zbieżny, gdy $|a_0| < 1$.

Ponieważ wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie możemy opuścić wartość bezwzględną.

Aby nasze wyrażenie miało sens liczbowy musimy założyć, że

$2x - 371 \neq 0$

$x \neq \frac{371}{2}$

Mamy więc:

$\frac{1}{2x - 371} < 1$

$2x - 371 > 1$

$2x > 372$

$x > 186$

Odpowiedź:

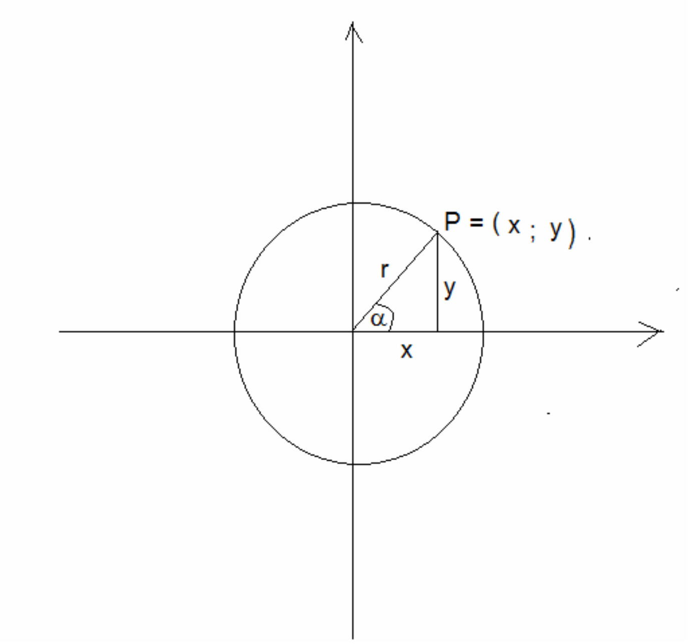
Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą warunki zadania jest liczba 187.

Zadanie 8

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2+y^2=2$, prawdziwa jest nierówność $x+y\le 2$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $x^2+y^2=2$, to równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r=\sqrt{2}$. Zatem $x=r\cdot\cos\alpha$ $\quad i \quad$ $y=r\cdot\sin\alpha$. Popatrz na rysunek



Ponieważ liczby x i y są dodatnie, więc $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Mamy wówczas

$$x+y=r\cos\alpha+r\sin\alpha=r(\cos\alpha+\sin\alpha)=\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

Ponieważ

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Więc

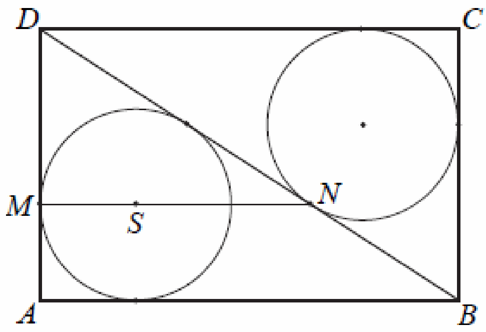
$$x+y=\sqrt{2}\left(\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sqrt{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\le 2$$

Bo $\cos x\le 1$

Zadanie 9

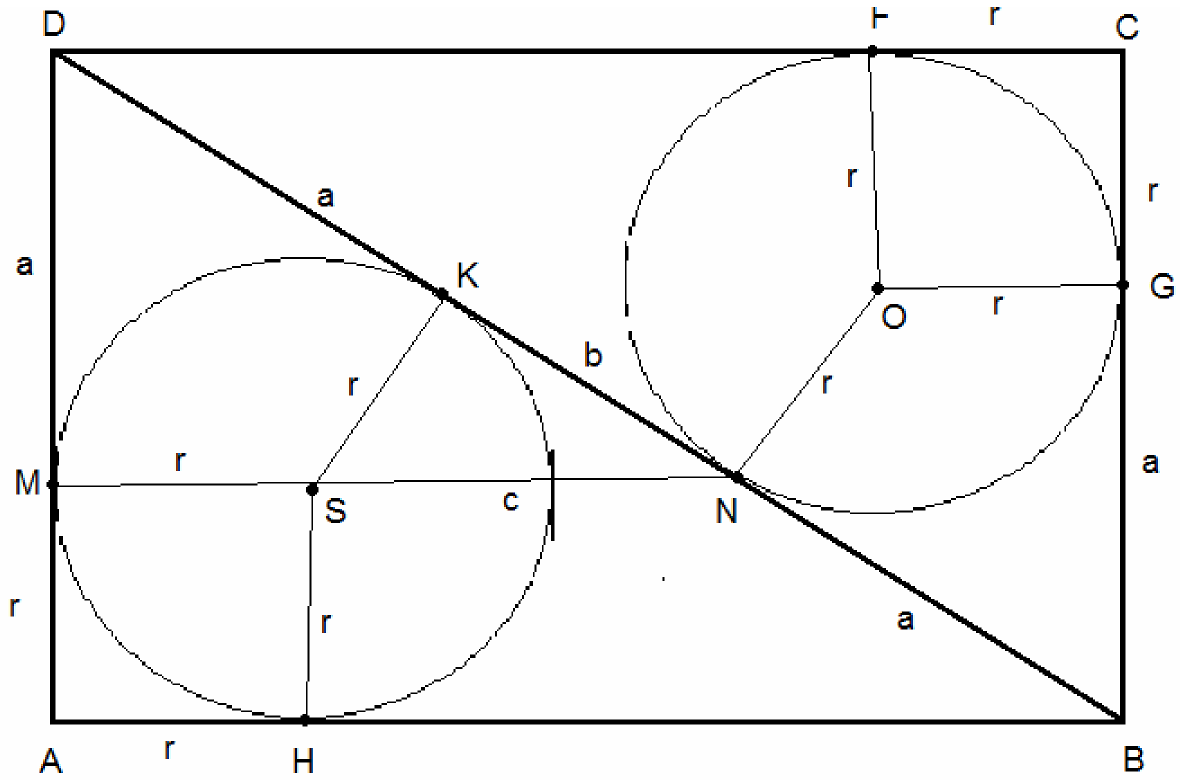
Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.



Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

Rozwiązanie:

Uzupełnijmy powyższy rysunek.



Ponieważ $|AM| = |MS| = r$, to wystarczy dowieść, że $|DM| = |SN|$. Z własności stycznych do okręgu wychodzących z tego samego punktu mamy, że

$|MD| = |DK| = |NB| = |BG| = a$

$|AM| = |MS| = |HS| = |SK| = |ON| = |OG| = |OI| = |CI| = |CG| = r$

Ponad to umówmy się, że $|KN| = b \quad i \quad |SN| = c$

Trójkąty MND i SNK są podobne. (Oba są prostokątne i mają wspólny kąt MND).

Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że

$$\frac{r}{a} = \frac{c}{|DN|}$$

Ale $|DN| = a + b$, więc

$$\frac{r}{a} = \frac{c}{a + b}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$c = \frac{ra + rb}{a}$$

Podobne są też trójkąty MND i ABD. (Oba są prostokątne i mają wspólny kąt ADC.

Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że

$$\frac{a + r}{a} = \frac{2a + b}{a + b}$$

Po przekształceniach mamy

$$a^2 + ab + ar + br = 2a^2 + ab$$

$$a^2 = r(a + b)$$

Podstawmy w równaniu

$$c = \frac{ra + rb}{a}$$

$$ra + rb = a^2$$

I mamy

$$c = \frac{a^2}{a} = a$$

$$c = a$$

Co kończy dowód.

Zadanie 10

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji f i g, określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

Rozwiązanie:

Na początek rozwiążmy następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 5 - ax \end{cases}$$

Wynika z tego, że

$$x - 2 = 5 - ax$$

$$x + ax = 7$$

$$x(1 + a) = 7$$

Ponieważ będziemy dzielić przez $1 + a$, musimy przyjąć założenie, że $a \neq -1$.

Wówczas mamy

$$x = \frac{7}{1 + a}$$

$$y = \frac{7}{1 + a} - 2 = \frac{7 - 2 - 2a}{1 + a} = \frac{5 - 2a}{1 + a}$$

X będzie dodatnie gdy $1 + a > 0$, czyli $a > -1$

Y będzie dodatnie gdy $\frac{5-2a}{1+a} > 0$.

Ponieważ iloraz jest dodatni, gdy dzielna i dzielnik są tego samego znaku, więc zachodzą dwa przypadki:

Przypadek pierwszy

$5 - 2a > 0 \qquad i \qquad 1 + a > 0$

$-2a > -5 \qquad i \qquad a > -1$

$$a < \frac{5}{2}$$

Przypadek drugi

$5-2a<0 \qquad i \qquad 1+a<0$

$-2a<-5 \qquad i \qquad a<-1$

$a>\frac{5}{2}$

Sprzeczność

Odpowiedź:

Warunki zadania będą spełnione dla $a \in \left(-1; \frac{5}{2}\right)$

Zadanie 11

Rozwiąż nierówność $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie:

Aby nierówność miała sens liczbowy należy założyć, że $x \neq \frac{\pi}{2}$ $\quad i \quad$ $x \neq \frac{3}{2}\pi$.

Ponieważ mianownik zawsze jest dodatni, więc nierówność będzie spełniona, gdy licznik będzie ujemny

$2\cos x - \sqrt{3} < 0$

$2\cos x < \sqrt{3}$

$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ponieważ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gdy $x = \frac{\pi}{6}$ $\quad lub \quad$ $x = \frac{11}{6}\pi$

Odpowiedź

$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy $x \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{11}{6}\pi\right)$ bez $\frac{\pi}{2}$ $\quad i \quad$ $\frac{3}{2}\pi$

Zadanie 12

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x)=x^2+2(m+1)x+6m+1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1-x_2|<3$.

Rozwiązanie:

Trójmian kwadratowy ma dwa pierwiastki, gdy jego wyróżnik jest dodatni

$$\Delta= b^2-4ac=[2(m+1)]^2-4(6m+1)=4(m+1)^2-24m-4=4(m^2+2m+1)-$$

$$-24m-4=4m^2+8m+4-24m-4=4m^2-16m>0$$

$$4m(m-4)>0$$

$$(m>0 \quad i \quad m>4) \qquad lub \qquad (m<0 \quad i \quad m<4)$$

$$m<0 \qquad lub \qquad m>4$$

Na mocy wzorów Viete'a mamy

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Jeżeli pierwiastki mają być tego samego znaku, to $6m+1>0$

$$m>-\frac{1}{6}$$

$$|x_1-x_2|<3$$

$$\left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|<3$$

$$\left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}+b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|<3$$

$$\left|\frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a}\right|<3$$

$$\sqrt{\Delta}<3$$

$$4m^2-16m<9$$

$4m^2 - 16m - 9 < 0$

$\Delta = 16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9 = 256 + 144 = 400$

$\sqrt{\Delta} = 20$

$m_1 = \frac{16 - 20}{8} = -\frac{1}{2}$

$m_2 = \frac{16 + 20}{8} = 4\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < m < 4\frac{1}{2}$

Odpowiedź

Zbierając wszystkie warunki otrzymujemy $m \in \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \quad lub \quad m \in \left(4; 4\frac{1}{2}\right)$

Zadanie 13

Punkty $A=(30, 32)$ i $B=(0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x-y+2=0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

Rozwiązanie

Ponieważ prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ przechodzi przez punkt A i jest osią symetrii czworokąta ABCD więc punkt D jest symetryczny do punktu B i odcinek BD jest prostopadły do tej prostej. Znajdźmy współczynnik kierunkowy zadanej prostej

$x - y + 2 = 0$

$y = x + 2$

W takim razie współczynnik kierunkowy wynosi 1

Równanie prostej przechodzącej przez punkty B i D będzie więc miało postać

$y = -x + b$

Ponieważ prosta ta przechodzi przez punkt B=(0; 8),więc

$8 = b$

Nasza prosta ma więc równanie

$y = -x + 8$

Znajdźmy punk przecięcia tych prostych

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$

$2y = 10$

$y = 5$

$x + 3$

$E = (3; 5)$

Wektor

$\overrightarrow{EB} = [0 - 3; 8 - 5] = [-3; 3]$

Wektor

$\overrightarrow{DE} = [3 - x; 3 - y]$

Wektory $\overrightarrow{EB}\ i\ \overrightarrow{DE}$ są równe, więc

$$\begin{cases} 3 - x = -3 \\ 5 - y = 3 \end{cases}$$

$x = 6$

$y = 2$

$D = (6; 2)$

Mamy już trzy wierzchołki naszego czworokąta. Należy jeszcze znaleźć jego czwarty wierzchołek C. Musi on leżeć na prostej o równaniu $y = x + 2$ i na okręgu opisanym na tym czworokącie. Mając 3 wierzchołki naszego czworokąta, spróbujmy znaleźć równanie okręgu opisanego na tym czworokącie. Z własności czworokąta wpisanego w okrąg wynika, że trójkąty ABC i ADC są prostokątne, a przekątna AC jest wspólną przeciwprostokątną tych trójkątów. Środek szukanego okręgu musi więc leżeć na prostej opisanej równaniem $y = x + 2$.

Ogólna postać równania prostej to

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Znając 3 punkty na okręgu możemy napisać zespół trzech równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} 30^2 + 32^2 + 30a + 32b + c = 0 \\ 8^2 + 8b + c = 0 \\ 6^2 + 2^2 + 6a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 900 + 1024 + 30a + 32b + c = 0 \\ 64 + 8b + c = 0 \\ 36 + 4 + 6a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1924 + 30a + 32b + c = 0 \\ 64 + 8b + c = 0 \\ 40 + 6a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$c = -8b - 64$

$$\begin{cases} 1924 + 30a + 32b - 8b - 64 = 0 \\ 40 + 6a + 2b - 8b - 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1860 + 30a + 24b = 0 \\ -24 + 6a - 6b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 310 + 5a + 4b = 0 \\ -4 + a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 310 + 5a + 4b = 0 \\ -16 + 4a - 4b = 0 \end{cases}$$

$$294 + 9a = 0$$

$$3a = -98$$

$$a = -32\frac{2}{3}$$

$$-4 - 32\frac{2}{3} - b = 0$$

$$b = -36\frac{2}{3}$$

Środek szukanego okręgu S=(p; q), gdzie $p = -\frac{a}{2} = \frac{32\frac{2}{3}}{2} = 16\frac{1}{3}$ i $q = -\frac{b}{2} = \frac{36\frac{2}{3}}{2} = 18\frac{1}{3}$

$$S = \left(16\frac{1}{3}; 18\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{SA} = \left[30 - 16\frac{1}{3}; 32 - 18\frac{1}{3}\right] = \left[13\frac{2}{3}; 13\frac{2}{3}\right]$$

$$\overrightarrow{DS} = \left[16\frac{1}{3} - x; 18\frac{1}{3} - y\right]$$

Ponieważ wektory $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SD}$ więc $16\frac{1}{3} - x = 13\frac{2}{3} \quad i \quad 18\frac{1}{3} - y = 13\frac{2}{3}$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$y = 4\frac{2}{3}$$

Odpowiedź:

Pozostałe wierzchołki tego czworokąta, to $C = \left(2\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3}\right) \quad i \quad D = (6; 2)$

Zadanie 14

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od rozmieszczenia trzech 1. Ponieważ pierwszą jedynkę można ustawić na dowolnym miejscu liczby, więc można to zrobić na 10 sposobów. Drugą jedynkę można rozstawić już tylko na 9 sposobów, a trzecią na 7 sposobów. Daje to $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.
Ponieważ jedynki są nierozróżnialne, trzeba nasz wynik podzielić przez ilość permutacji

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$720 : 6 = 120$

Przy każdej kombinacji jedynek jest jeszcze 7 miejsc na cyfry 2 i 3.

Będziemy więc losować z pośród dwóch cyfr jedną, zapisywać ją na kolejnym wolnym miejscu, zwracać i losować ponownie. Mamy więc $2^7 = 128$ kombinacji

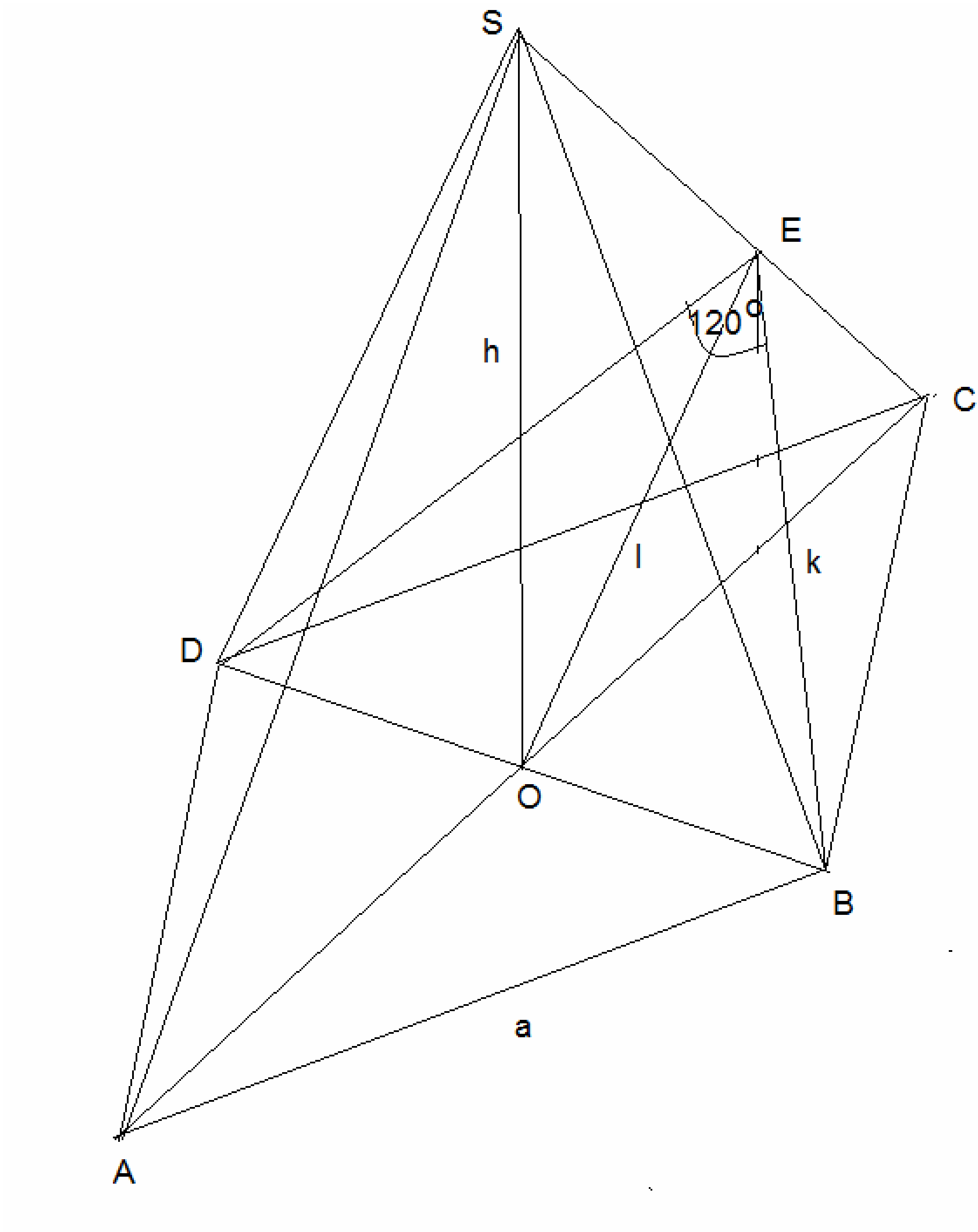
$120 \cdot 128 = 15360$

Zadanie 15

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Zacznijmy od rysunku



Z prostokątnego trójkąta BCE policzmy EC

$|AC| = |DB| = a\sqrt{2}$

Łatwo zauważyć, że trójkąt OBE to ekierka o kątach 60°; 30° i 90°. W takim razie $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$k = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$l = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Z prostokątnego trójkąta ECO policzymy $|EC|$

$$|EC|^2 + k^2 = a^2$$

$$|EC|^2 = a^2 - k^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 6}{9} = a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{3}$$

$$|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trójkąty OEC i OSC są podobne (bo oba są prostokątne i mają jeden kąt wspólny. Jest to kąt SCO

$$\frac{l}{h} = \frac{|EC|}{|OC|}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{5} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{5} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{a\sqrt{12}}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$3a\sqrt{12} = 60\sqrt{3}$$

$$a = 10$$

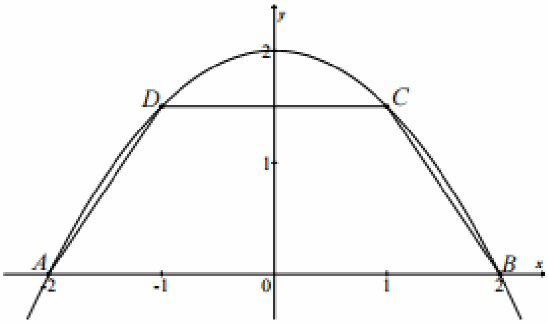
$$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 100 = \frac{500}{3} = 166\frac{2}{3}$$

Odpowiedź

Poszukiwana objętość ostrosłupa wynosi $166\frac{2}{3}$

Zadanie 16

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

Rozwiązanie

$$P = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Gdzie a i b to podstawy trapezu, a h to jego wysokość.

Jeśli pierwsza współrzędna tej paraboli to x_0, to druga współrzędna $y_0 = 2 - \frac{1}{2}x_0^2$.

Wówczas $a = 4$; $b = 2 \cdot x_0$; $h = 2 - \frac{1}{2}x_0^2$

$$P = \frac{1}{2}(4 + 2x_0)\left(2 - \frac{1}{2}x_0^2\right) = (2 + x_0)\left(2 - \frac{1}{2}x_0^2\right)$$

$$P(x) = (2 + x)\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

Funkcja P(x) będzie miała wartość optymalną dla argumentu, w który pochodna się wyzeruje.

$$P'(x) = \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) + (2 + x)(-x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 - x^2 - 2x = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$$

$P'(x) = 0$, to $-\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$$x_1 = \frac{2-4}{2a} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{2+4}{-3} = -2$$

Ponieważ $x > 0$, więc największe pole będzie dla $x = \frac{2}{3}$ i wyniesie ono

$$P = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{128}{27} = 4\frac{20}{27}$$

$$y = 2 - \frac{1}{2}x^2 = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 2 - \frac{2}{9} = 1\frac{7}{9}$$